

مرجع سوالات و محتوای آموزشی

از ابتدایی تا کنکور

زبان خارجی

کامپیوتر و فناوری

www.novinmad.ir

[کلیک کنید]



درسنامه و نکات کلیدی

(فصل هشتم)

سال نهم

حجم و مساحت

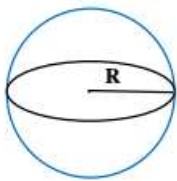
حجم: مقدار فضایی را که یک جسم اشغال می کند حجم (گنجایش) نام دارد و حجم را با حرف انگلیسی (V) نشان می دهند.

انواع حجم: (۱) حجم منشوری (۲) حجم هرمی یا مخروطی (۳) حجم کروی

دایره: مجموعه نقاطی از صفحه که فاصله تمام نقاط از یک نقطه به نام (مرکز دایره) به یک اندازه باشد. به این فاصله نقاط صفحه

تا مرکز دایره (شعاع دایره) می گویند.
 مرکز دایره
 شعاع
نکته: دایره را به اختصار به صورت $C(O, R)$ نشان می دهند.

کره: مجموعه نقاطی از فضا که فاصله تمام نقاط از یک نقطه به نام (مرکز کره) به یک اندازه باشد. به این فاصله نقاط صفحه تا مرکز دایره (شعاع کره) می گویند.



مانند: کره زمین و توپ

فرمول حجم کره: $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ **فرمول مساحت کره:** $S = 4\pi r^2$

مثال: حجم و مساحت کره با قطر ۴ سانتی متر را به دست آورید.

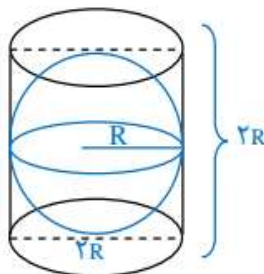
$$\left\{ \begin{array}{l} V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3} \times \frac{3}{14} \times 2^3 = 33/49 \\ S = 4\pi r^2 = 4 \times \frac{3}{14} \times 2^2 = 50/24 \end{array} \right.$$

شعاع کره $4 \div 2 = 2$

مثال: نسبت عددی حجم کره به مساحت کره چند است.

$$\frac{V}{S} = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{4\pi r^2} = \frac{1}{3}r$$

نکته: اگر کره به طور کامل داخل استوانه قرار گیرد. می گوییم کره بر استوانه محاط شده و استوانه بر کره محیط شده است.



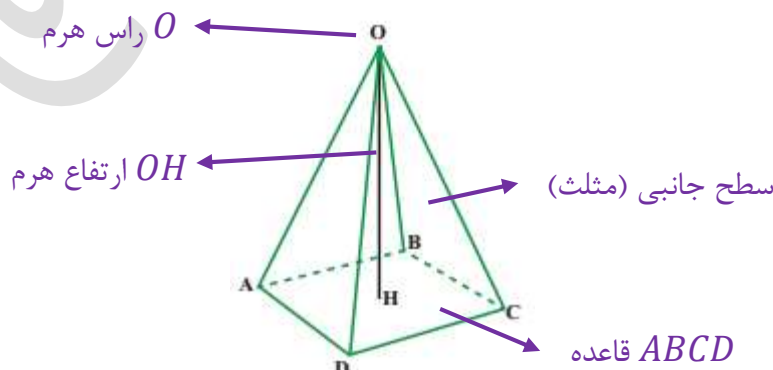
حجم و مساحت

شعاع کره $cm \ 3 = 2 \div 6$ **مثال:** کره ای در استوانه ای به قطر ۶ سانتی متر محاط شده است:الف) حجم کره را به دست آورید.

$$v = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3} \times 3/14 \times 3^3 = 113/04 \text{ cm}^3$$
ب) حجم استوانه را به دست آورید.

$$v = s \times h = (3 \times 3 \times 3/14) \times 6 = 169/56 \text{ cm}^3$$
ج) حجم فضای بین کره و استوانه را به دست آورید.

$$169/56 - 113/04 = 56/52 \text{ cm}^3$$
نکته: از دوران نیم دایره حول قطر کره حاصل می شود.**نکته:** از دوران ربع دایره حول شعاع نیم کره حاصل می شود.**نکته:** برای به دست آوردن حجم نیم کره می توان از رابطه ی $v = \frac{2}{3}\pi r^3$ استفاده کرد.**مثال:** حجم حاصل از دوران ربع دایره حول شعاع ۴ سانتی متر را به دست آورید. (بر حسب π)(از دوران ربع دایره حول شعاع نیم کره حاصل می شود)

$$v = \frac{2}{3}\pi r^3 = \frac{2}{3}\pi \times 4^3 = 42/66 \pi$$
نکته: اگر شعاع کره را n برابر کنیم مساحت کره n^2 و حجم کره n^3 برابر خواهد شد.**مثال:** اگر شعاع کره ای را ۴ برابر کنیم مساحت و حجم کره چند برابر خواهد شد.برابر $v = n^3 = 4^3 = 64$ برابر $s = n^2 = 4^2 = 16$ **هرم:** شکل فضایی که سطح جانبی آن مثلث و وجه زیرین (قاعده) آن چند ضلعی محدب باشد.**نکته:** به فاصله راس هرم تا قاعده ارتفاع هرم می گویند.

حجم و مساحت

$$\text{حجم هرم} = \frac{1}{3} \times \text{مساحت قاعده} \times \text{ارتفاع}$$

حجم هرم: الف) کلامی:

$$v = \frac{1}{3} s \cdot h$$

ب) جبری:

مساحت مربع

مثال: حجم هرم مربع القاعده ای به ضلع ۵ سانتی متر و ارتفاع ۶ سانتی متر را به دست آورید.

$$v = \frac{1}{3} s \cdot h = \frac{1}{3} \times (5 \times 5) \times 6 = 50 \text{ cm}^3 \quad (\text{خودش} \times \text{یک ضلع} = s \text{ مربع})$$

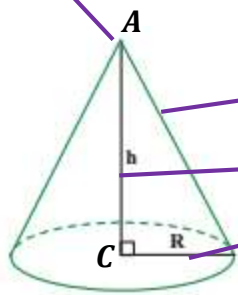
مثال: قاعده لوزی با قطرهای ۶ و ۸ سانتی متر است. اگر ارتفاع هرم ۵ سانتی متر باشد حجم هرم چند سانتی متر مکعب است.

مساحت لوزی

$$v = \frac{1}{3} s \cdot h = \frac{1}{3} \times \left(\frac{6 \times 8}{2} \right) \times 5 = 40 \text{ cm}^3 \quad \left(\text{حاصل ضرب دو قطر} \right. \\ \left. s \text{ لوزی} = \frac{\quad}{2} \right)$$

نکته: اگر دو هرم دارای قاعده های هم مساحت و ارتفاع یکسان باشند. دارای حجم برابر هستند.

راس مخروط A



AB مولد مخروط

AC ارتفاع مخروط

BC شعاع قاعده

مخروط: شکلی شبیه ای هرم منتظم که قاعده آن دایره و پای ارتفاع مخروط مرکز دایره باشد.

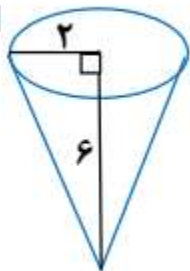
$$\text{حجم مخروط} = \frac{1}{3} \times \text{مساحت قاعده} \times \text{ارتفاع}$$

حجم مخروط: الف) کلامی:

$$v = \frac{1}{3} s \cdot h = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

ب) جبری:

مثال: حجم مخروط زیر را حساب کنید.



$$v = \frac{1}{3} \pi r^2 h = \frac{1}{3} \times 3/14 \times 2^2 \times 6 = 25/12 \text{ cm}^3$$

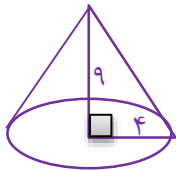
مثال: گنجایش مخروطی ۴۷۱۰۰ لیتر است. اگر شعاع قاعده ۳ متر باشد ارتفاع مخروط چند متر است.

حجم مخروط $47100 \div 1000 = 47/1 m^3$ (هر متر مکعب ۱۰۰۰ لیتر است.)

$$v = \frac{1}{3}\pi r^2 h \Rightarrow 47/1 = \frac{1}{3} \times 3/14 \times 3^2 \times h \Rightarrow h = \frac{47/1}{9/42} = 5 m$$

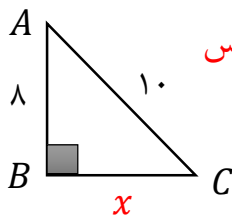
نکته: از دوران مثلث قائم الزاویه حول یک ضلع قائم آن مخروط حاصل می شود. ضلعی که دوران روی آن انجام شده است ارتفاع مخروط و ضلع دیگر شعاع قاعده نام دارد.

مثال: مثلث قائم الزاویه با اضلاع قائم ۴ و ۹ سانتی متر را روی ضلع بزرگتر دوران داده ایم. حجم شکل حاصل چند سانتی متر مکعب است.



$$v = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3} \times 3/14 \times 4^2 \times 9 = 150/72 cm^3$$

مثال: مثلث قائم الزاویه ABC را روی حول ضلع AB دوران داده ایم. حجم شکل حاصل را به دست آورید.



شعاع قاعده $x^2 = 10^2 - 8^2 = 100 - 64 = 36 \Rightarrow x = 6$: رابطه فیثاغورس

$$v = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3} \times 3/14 \times 6^2 \times 8 = 301/44 cm^3$$

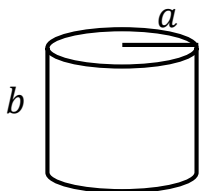
نکته: از دوران مستطیل و مربع حول یک ضلع آن استوانه تشکیل می شود.

نکته: مساحت جانبی و مساحت کل استوانه از رابطه های زیر به دست می آید :

$$s = p \times h \Rightarrow \text{ارتفاع} \times \text{محیط قاعده} = \text{مساحت جانبی}$$

$$S = \text{دو قاعده} + s = \text{جانبی} \Rightarrow S = \text{کل} = \text{مساحت دو قاعده} + \text{مساحت جانبی}$$

مثال: نسبت حجم به مساحت کل استوانه ای را به دست آورید که شعاع قاعده آن a و ارتفاع آن b باشد.



$$v = s \times h = (a \times a \times \pi) \times b = \pi a^2 b$$

$$s = p \times h = (2 \times a \times \pi) \times b = 2\pi ab$$

$$S = \text{کل} = s + \text{دو قاعده} = 2\pi ab + 2a^2\pi = 2\pi a(b + a)$$

$$\frac{v}{s} = \frac{\pi a^2 b}{2\pi a(b + a)} = \frac{ab}{2(a + b)}$$