

توان و جذر

ضرب اعداد توان دار : الف) اگر پایه ها برابر باشند : یکی از پایه ها را نوشته و توان ها را با هم جمع می کنیم.

$$a^m \times a^n = a^{m+n}$$

$$4^7 \times 4^3 = 4^{10}$$

مانند :

ب) اگر توان ها برابر باشند : یکی از توان ها را نوشته و پایه ها را در هم ضرب می کنیم.

$$a^m \times b^m = (ab)^m$$

$$12^7 \times 3^7 = 36^7$$

مانند :

تقسیم اعداد توان دار : الف) اگر پایه ها برابر باشند : یکی از پایه ها را نوشته و توان ها را از هم کم می کنیم.

$$a^m \div a^n = a^{m-n}$$

$$\frac{9^5}{9^3} = 9^2$$

مانند :

ب) اگر توان ها برابر باشند : یکی از توان ها را نوشته و پایه ها را بر هم تقسیم می کنیم.

$$a^m \div b^m = \left(\frac{a}{b}\right)^m$$

$$20^8 \div 4^8 = 5^8$$

مانند :

نکته : اگر در ضرب و تقسیم اعداد توان دار پایه ها و توان ها برابر نباشند از تجزیه استفاده می کنیم.

$$4^8 \times 2^3 = (2^2)^8 \times 2^3 = 2^{16} \times 2^3 = 2^{19}$$

تجزیه

$$9^2 \div 27 = (3^2)^2 \div 3^3 = 3^4 \div 3^3 = 3$$

تجزیه

مانند :

نکته : اگر اعداد توان دار مثل هم باشند و بین آن ها علامت جمع باشد آن عبارت را تبدیل به ضرب می کنیم.

$$2^6 + 2^6 = 2 \times 2^6 = 2^7$$

$$9^5 + 9^5 + 9^5 = 3 \times 9^5 = 3 \times (3^2)^5 = 3^{10}$$

تجزیه

مانند :

نکته : عدد منفی داخل پرانتز باشد علامت منفی به تعداد توان ضرب می شود. اگر عدد منفی داخل پرانتز نباشد منفی به تعداد توان ضرب نمی شود.

$$(-4)^2 = -4 \times -4 = 16$$

$$-4^2 = -(4 \times 4) = -16$$

مانند :

نکته : عدد منفی به توان زوج برسد حاصل عددی مثبت و اگر به توان فرد برسد حاصل عددی منفی می شود.

$$(-3)^4 = 81 \quad \text{توان زوج}$$

$$(-3)^3 = -27 \quad \text{توان فرد}$$

مانند :

نکته : اگر عدد توان دار داخل پرانتز باشد و توان دیگر داشته باشد پایه را نوشته و توان ها را در هم ضرب می شود.

$$(3^2)^2 = 3^4$$

$$((2^2)^3)^4 = 2^{24}$$

مانند :

نکته : اگر عدد توان دار بدون پرانتز نباشد و توان دیگر داشته باشد پایه را نوشته و عبارت بالا را جواب می دهیم.

$$2^{3^2} = 2^9 \quad 3^2 = 9$$

مانند :

توان و جذر

مثال: حاصل هر عبارت را به صورت عدد توان دار بنویسید.

$$4^7 \times 2^3 \times (0.5)^7 = 2^7 \times 2^3 = 2^{10}$$

$$3^4 \times 3^2 \div 27 = 3^6 \div 3^3 = 3^3$$

تجزیه

$$\frac{20^6}{5^2 \times 4^6} = \frac{5^6}{5^2} = 5^4$$

$$\frac{4^7 \times 3^1}{3^3 \times 4^2} = \frac{4^7}{4^2} \times \frac{3^1}{3^3} = 4^5 \times 3^5 = 12^5$$

مثال: اگر $3^a = 5$ باشد حاصل هر عبارت را به دست آورید.

$$3^{a+2} = 3^a \times 3^2 = 5 \times 9 = 45$$

$$27^a = (3^3)^a = (3^a)^3 = 5^3 = 125$$

$$3^{a-3} = 3^a \div 3^3 = 5 \div 27 = \frac{5}{27}$$

$$9^{2a} = (3^2)^{2a} = (3^a)^4 = 5^4 = 625$$

نکته: برای مقایسه اعداد توان باید پایه یا توان اعداد را برابر کنیم.

مثال: اعداد زیر را از کوچک به بزرگ مرتب کنید.

$$4, 2^{3^2}, 2^3, 8^4, (2^3)^2 \Rightarrow 2^2, 2^9, 2^3, 2^{12}, 2^6 \Rightarrow 2^2 < 2^3 < 2^6 < 2^9 < 2^{12}$$

جذر یا ریشه دوم اعداد: در تساوی $[3^2 = 9, (-3)^2 = 9]$ عدد ۹ را مجذور اعداد ۳ و -۳ می گویند. و اعداد ۳ و -۳

ریشه های دوم ۹ می گویند.

نکته: هر عدد دارای دو ریشه دوم است که یکی قرینه ی دیگری است.

مانند: ریشه های دوم عدد ۳۶ برابر است با: ۶ و -۶

نکته: در جذر گیری فقط عدد مثبت آن در نظر گرفته می شود و جذر را با رادیکال ($\sqrt{\quad}$) نشان می دهند.

نکته: اعداد منفی جذر ندارند. چون مجذور هیچ عددی ؛ منفی نمی شود.

نکته: جذر اعداد صفر و یک برابر با خود آن اعداد است.

مثال: جذر اعداد زیر را به دست آورید.

$$\sqrt{\sqrt{16}} = \sqrt{4} = 2$$

$$\sqrt{0.25} = 0.5$$

$$\sqrt{\frac{49 \times 25}{100}} = \frac{7 \times 5}{10} = \frac{7}{2}$$

توان و جذر

جذر تقریبی اعداد: برای به دست آوردن جذر تقریبی اعداد مراحل زیر را به ترتیب انجام می دهیم:

(۱) ابتدا مشخص می کنیم عدد داده شده بین کدام دو عدد صحیح متوالی قرار دارد.

(۲) سپس عدد وسط دو عدد را مشخص کرده و مجذور آن را می نویسیم.

(۳) سپس اگر مجذور عدد وسطی از عدد داده شده بیشتر بود ۴ عدد کمتر از عدد وسطی و اگر از عدد داده شده کمتر بود ۴ عدد بزرگتر از عدد وسطی را می نویسیم.

(۴) داخل یک جدول مجذورهای ۴ عدد را نوشته سپس مجذور عددی که به عدد داده شده نزدیکتر بود همان جذر تقریبی عدد است.

نکته: برای این که بدانیم عدد داده شده بین کدام دو صحیح متوالی قرار دارد مجذور دو عددی را مشخص می کنیم که به عدد داده شده نزدیک باشد.

مثال: مشخص عدد $\sqrt{۳۲}$ و $\sqrt{۸۳}$ بین کدام دو عدد قرار دارد و به کدام عدد نزدیکتر است.

$$\sqrt{۳۵} < \sqrt{۳۲} < \sqrt{۳۶} \quad (\text{بین ۵ و ۶ که به ۶ نزدیکتر است}) \quad \sqrt{۸۱} < \sqrt{۸۳} < \sqrt{۱۰۰} \quad (\text{بین ۹ و ۱۰ که به ۹ نزدیکتر است})$$

مثال: جذر تقریبی عدد ۴۷ را به دست آورید.

مرحله ۱

عدد وسط

$$۶ \rightarrow ۶/۵ \leftarrow ۷$$

$$\sqrt{۳۶} < \sqrt{۴۷} < \sqrt{۴۹}$$

مرحله ۲

مجذور عدد وسط

$$(۶/۵)^2 = ۴۲/۲۵$$

مرحله ۳

$$۴۲/۲۵ < ۴۷$$

چون مجذور عدد وسط کمتر از عدد شده مجذور

۴ عدد بزرگتر از عدد وسط را می نویسیم

$$\sqrt{۴۷} \approx ۶/۸$$

عدد	۶/۶	۶/۷	۶/۸	۶/۹
مجذور عدد	۴۳/۵۶	۴۴/۸۹	۴۶/۲۴	۴۷/۶۱

مثال: جذر تقریب عدد ۱۲۷ را به دست آورید.

مرحله ۱

عدد وسط

$$۱۱ \rightarrow ۱۱/۵ \leftarrow ۱۲$$

$$\sqrt{۱۲۱} < \sqrt{۱۲۷} < \sqrt{۱۴۴}$$

مرحله ۲

مجذور عدد وسط

$$(۱۱/۵)^2 = ۱۳۲/۲۵$$

مرحله ۳

$$۱۳۲/۲۵ > ۱۲۷$$

چون مجذور عدد وسط بیشتر از عدد شده مجذور

۴ عدد کوچکتر از عدد وسط را می نویسیم

توان و جذر

مرحله ۴

عدد	۱۱/۱	۱۱/۲	۱۱/۳	۱۱/۴
مجذور عدد	۱۲۳/۲۱	۱۲۵/۴۴	۱۲۷/۶۹	۱۲۹/۹۶

$$\sqrt{127} \approx 11/2$$

نمایش اعداد رادیکالی روی محور اعداد: برای نمایش این اعداد چهار مورد زیر را باید مشخص کنیم:

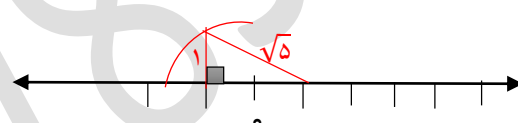
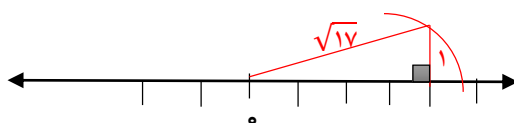
تعداد مثلث

(۳) جهت حرکت

(۲) تعداد حرکت

(۱) مبدا حرکت

مثال: اعداد $\sqrt{17}$ و $1 - \sqrt{5}$ را روی محور اعداد نمایش دهید.



خواص ضرب و تقسیم رادیکال ها: در ضرب و تقسیم رادیکال ها می توان رادیکال را جدا از هم نوشت.

مثال: حاصل عبارت های زیر را به دست آورید.

$$\sqrt{900} = \sqrt{9 \times 100} = \sqrt{9} \times \sqrt{100} = 30$$

$$\sqrt{\frac{25}{36}} = \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{36}} = \frac{5}{6}$$

نکته: در جمع و تفریق رادیکال ها نمی توان رادیکال را جدا از هم نوشت و جواب داد:

$$\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

$$\sqrt{a-b} \neq \sqrt{a} - \sqrt{b}$$

نکته: برای ساده کردن عدد زیر رادیکال می توان برای بعضی از اعداد یک ضرب نوشت به شرطی که یکی از دو عدد جذر دقیق داشته باشد.

مثال: اعداد زیر را به صورت ضرب یک عدد طبیعی در رادیکال بنویسید.

$$\sqrt{20} = \sqrt{4 \times 5} = 2\sqrt{5}$$

جذر ۲

$$3\sqrt{48} = 3\sqrt{16 \times 3} = 12\sqrt{3}$$

جذر ۴